Correction activité B. II. suite au devoir surveillé $n°3$

Notons $f : x \mapsto \sqrt{x^2+4}$.

1. L'image de la fonction $x \mapsto x^2+4$ définie sur $\mathbb{R}$ est $[4,+\infty[$. Or la fonction racine est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $[4,+\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$. Par composée de fonctions dérivables, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

2. La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
   Ainsi f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$ dans $[f(0); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= [2,+\infty[$.
   On note g la bijection réciproque associée.
3. La fonction f est dérivable donc g est dérivable sur $\{y\in[2,+\infty[, f'(g(y))\neq 0\} = \{y\in[2,+\infty[, g(y)\neq 0\} =]2,+\infty[$.
   De plus, pour tout $y\in]2,+\infty[$, $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{\frac{g(y)}{\sqrt{g^2(y)+4}}} = \frac{\sqrt{g^2(y)+4}}{g(y)}$.
4. Soit $y\in[2,+\infty[$. Soit $x\in\mathbb{R}_+$. On a $x = g(y) \iff f(x) = y \iff \sqrt{x^2+4} = y \iff x^2+4 = y^2 \iff x = \sqrt{y^2-4}$.
   Ainsi $g(y) = \sqrt{y^2-4}$.
5. Par composée, la fonction g est dérivable sur $]2,+\infty[$ et pour tout $y\in]2,+\infty[$, $g'(y) = \frac{2y}{2\sqrt{y^2-4}} = \frac{y}{\sqrt{y^2-4}}$ et d'après la question 4., $g'(y) = \frac{\sqrt{g^2(y)+4}}{g(y)} = \frac{\sqrt{y^2}}{\sqrt{y^2-4}} = \frac{y}{\sqrt{y^2-4}}$.

Correction activité C. II. suite au devoir surveillé $n°3$

La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(2x)}{\sin^2(x)+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ par produit et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. D'après le théorème fondamental de l'analyse, $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(2t)}{\sin^2(t)+1}\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{2\sin(t)\cos(t)}{\sin^2(t)+1}\mathrm{d}t = \int_0^{\sin(x)} \frac{2y}{y^2+1}\mathrm{d}y = \left[\ln(y^2+1)\right]_0^{\sin(x)} = \ln(\sin^2(x)+1)$.

Correction activité D. II. suite au devoir surveillé $n°3$

Considérons la fonction $f = \exp \times \cos$.

1. Considérons $g : x \mapsto \exp\left((1+\mathrm{i})x\right)$. On remarque que $\mathrm{Re}(g) = f$. La fonction g est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ car l'exponentielle complexe l'est. De plus, $g^{(n)} : x \mapsto (1+\mathrm{i})^n \exp\left((1+\mathrm{i})x\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Comme g est infiniment dérivable alors f l'est également et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(2n)} = \mathrm{Re}(g)^{(2n)} = \mathrm{Re}(g^{(2n)})$.
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(2n)}(x) = \mathrm{Re}\left((1+\mathrm{i})^{2n} \exp\left((1+\mathrm{i})x\right)\right) = 2^n \exp(x) \mathrm{Re}\left(\mathrm{i}^n \exp(\mathrm{i}x)\right)$. Ainsi, $f^{(2n)}(0) = 2^n \mathrm{Re}\left(\mathrm{i}^n\right)$. Conclusion : si n est pair, $f^{(2n)}(0) = 2^n(-1)^{\frac{n}{2}}$ et si n est impair, $f^{(2n)}(0) = 0$.
3. Comme, les fonctions exp et cos sont infiniment dérivables alors f l'est également. De plus, d'après la formule de Leibniz, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$f^{(2n)} = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} \cos^{(j)} \exp^{(2n-j)} = \exp \times \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} \cos^{(j)}$$
   Ainsi $f^{(2n)}(0) = \displaystyle\sum_{\substack{j \in [\![0,2n]\!] \\ j \text{ pair}}} \binom{2n}{j} (-1)^{\frac{j}{2}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} (-1)^k$
4. Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} (-1)^k = \begin{cases} 2^n(-1)^{\frac{n}{2}} \text{ si } n \text{ pair ;} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

Correction activité E. II. suite au devoir surveillé $n°3$

On considère l'équation différentielle (E) : $\mathrm{sh}(x)y' - \mathrm{ch}(x)y = \mathrm{ch}(x)$.

1. La fonction sh s'annule uniquement en 0. L'équation se normalise donc sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
2. Résolvons l'équation (E) : $y' - \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)} y = \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   C'est une EDL linéaire d'ordre 1 d'équation homogène dont les solutions de l'équation homogène sont de la forme :
   $$x \mapsto \lambda \mathbf{e}^{\ln(\mathrm{sh}(x))} \text{ i.e. } x \mapsto \lambda \mathrm{sh}(x) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}\,.$$
   On remarque que la fonction constante à -1 est solution de (E).
   Par conséquent, $S(\mathbb{R}_+^*) = \{x \mapsto \lambda \mathrm{sh}(x) - 1, \lambda \in \mathbb{R}\}$. De la même façon, $S(\mathbb{R}_-^*) = \{x \mapsto \mu \mathrm{sh}(x) - 1, \mu \in \mathbb{R}\}$.
3. Soit y une fonction de la variable réelle. La fonction y est solution de (E) si et seulement si y est dérivable et solution sur $\mathbb{R}_+^*$, sur $\mathbb{R}_-*$ et en 0. D'où y est solution de (E) si et seulement si
   $$\begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, y(x) = \lambda \mathrm{sh}(x) - 1 & (1) \\ \exists \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_-^*, y(x) = \mu \mathrm{sh}(x) - 1 & (2) \\ y \text{ dérivable en } 0. & (3) \\ \mathrm{sh}(0)y'(0) - \mathrm{ch}(0)y(0) = \mathrm{ch}(0) \text{ i.e. } y(0) = -1 & (4) \end{cases}$$
   Plaçons nous dans le cas où $(1), (2)$ et (4) sont vérifiées. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
   $$\frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \frac{\lambda \mathrm{sh}(x) - 1 + 1}{x} = \lambda \frac{\mathrm{sh}(x) - \mathrm{sh}(0)}{x - 0} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \lambda \mathrm{sh}'(0) = \lambda \mathrm{ch}(0) = \lambda$$
   Pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$,
   $$\frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \frac{\mu \mathrm{sh}(x) - 1 + 1}{x} = \mu \frac{\mathrm{sh}(x) - \mathrm{sh}(0)}{x - 0} \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} \mu \mathrm{sh}'(0) = \mu \mathrm{ch}(0) = \mu$$
   Par conséquent, y dérivable en 0 si et seulement si $\lambda = \mu$.
   Conclusion : y est solution de (E) si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda \mathrm{sh}(x) - 1$.
   Autrement dit : $S(\mathbb{R}) = \{x \mapsto \lambda \mathrm{sh}(x) - 1, \lambda \in \mathbb{R}\}$.